



TITLE:

超可微分函数に対するCauchy-Kowalevskyの定理とその双対 (偏微分方程式の解の構造 : 1976・1977年合併号)

AUTHOR(S):

小松, 彦三郎

CITATION:

小松, 彦三郎. 超可微分函数に対するCauchy-Kowalevskyの定理とその双対 (偏微分方程式の解の構造 : 1976・1977年合併号). 数理解析研究所講究録 1978, 337: 194-210

ISSUE DATE:

1978-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104225>

RIGHT:

超可微分函数に対する Cauchy-Kowalevsky の定理とその双対

東大 理学部 小松 彦三郎

§1 Cauchy-Kowalevsky の定理の一般化

古典的な Cauchy-Kowalevsky の定理は次のことを主張している.

$$(1) \quad P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

を \mathbb{R}^n の開集合 Ω 上で定義された偏微分作用素とする. 通常の微分型と仮定する. ここで $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$ を成分とする重複指数,

$$(2) \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

$$(3) \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

である. 次のことを仮定する.

(i) 超平面

$$(4) \quad \Omega' = \{x \in \Omega; x_n = 0\}$$

は非特性的である。すなわち

$$(5) \quad a_{(0, \dots, 0, m)}(x', 0) \neq 0, \quad x' \in \Omega'.$$

ここで Ω' は \mathbb{R}^{n-1} における開集合とも同一視する.

(ii) 係数

$$(6) \quad a_\alpha(x) \in \mathcal{A}(\Omega).$$

但し $\mathcal{A}(\Omega)$ は Ω 上の実解析函数全体の空間を表わす.

このとき, 次のことが結論される.

各 Cauchy data

$$(7) \quad g_1(x'), \dots, g_m(x') \in \mathcal{A}(\Omega')$$

と

$$(8) \quad f(x) \in \mathcal{A}(\Omega)$$

に対して Cauchy 問題

$$(9) \quad \partial_n^{j-1} u(x', 0) = g_j(x'), \quad j=1, \dots, m,$$

$$(10) \quad P(x, \partial) u(x) = f(x)$$

は Ω における Ω' の近傍 Ω_1 で定義された唯一つの解

$$(11) \quad u(x) \in \mathcal{A}(\Omega_1)$$

をもつ.

これを実解析函数より広い函数族に対してなりたつように拡張したい. 具体的に次々の函数族を考える.

M_p , $p=0, 1, 2, \dots$, を正数列とする. Ω 上無限回可微分函数 $f(x)$ が (M_p) 族の超可微分函数 ($\{M_p\}$ 族の超可微分函数) とは, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と $h > 0$ に対して定数 C が存在し (定数 h および C が存在し)

$$(12) \quad \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, \dots,$$

となることであると定義する.

以下 * によって (M_p) または $\{M_p\}$ を表すこととし, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ および $\mathcal{D}^*(\Omega)$ によって, Ω 上の * 族の超可微分函数全体の線型空間およびそのうちコンパクト台のものとする線型部分空間を表す.

よく知られているように $\mathcal{E}^{(p!)}(\Omega)$ は $\mathcal{A}(\Omega)$ であり, Ω が連結ならば $\mathcal{E}^{(p!)}(\Omega)$ は整函数全体を Ω に制限したものと同じである. しかし, 超可微分という言葉は可微分と実解析函数の間の意味で使いたいのので, M_p に対して次の条件を課すことにする.

$$(M.0) \quad M_0 = M_1 = 1;$$

$$(M.1) \quad M_p^2 \leq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \dots;$$

$$(M.2) \quad M_p \leq A H^p \min_{0 \leq q \leq p} M_q M_{p-q}, \quad p = 1, 2, \dots;$$

$$(M.3) \quad \sum_{q=p}^{\infty} \frac{M_q}{M_{q+1}} \leq A p \frac{M_p}{M_{p+1}}, \quad p = 1, 2, \dots;$$

$$(M.4) \quad \left(\frac{M_p}{p!} \right)^2 \leq \left(\frac{M_{p-1}}{(p-1)!} \right) \left(\frac{M_{p+1}}{(p+1)!} \right), \quad p = 1, 2, \dots,$$

$p \rightarrow \infty$ のとき $p M_{p-1} / M_p \rightarrow 0$ かつ $M_{p+1} \leq A H^p M_p$,
 $p = 0, 1, \dots$.

以上の条件, 特に (M.4) の諸条件は他と独立ではないが,
 これは他の条件とは異なる意味あいではあるためである.

典型的な例は列

$$(13) \quad M_p = (p!)^s, \quad s > 1,$$

であり, このときは (M_p) および $\{M_p\}$ を略して (s)
 および $\{s\}$ と書く. $\{s\}$ 族の超可微分函数は古典的な
 Gevrey 族の函数である. (s) 族のは Hörmander により
 用いられている.

方程式の理論は対応する作用素の理論であり, 線型方程式
 (10) の場合は作用素 $P(x, \partial)$ の像と核を決定することが最
 初の問題となる. Cauchy-Kowalevsky の定理は, すべて

が実解析的であるという条件の下で、これらの問題に理想的な解答を与えている。また、これから Holmgren の一意性定理より重要な結果が導き出される。

周知のように常微分方程式に対しては対応する存在定理が n 回連続可微分函数のカテゴリでもなりたち、常微分方程式論の基礎となっている。偏微分方程式に対しても解析性の条件を与えることができるかどうかは当然与えられるべき問題である。南雲道夫 [6] と F. Trèves [7] は方程式およびデータの時間 x_n に関する依存性は n 回連続可微分によることを示した。常微分方程式の場合はこれ以外の変数はないから、これは常微分方程式に対する上の存在定理の拡張ともなっている。しかし、残念ながらこの拡張の有用な応用は知られていないようである。

ところで、(6), (7), (8), (11) において単純に a を ε^* におきかえた定理は成立しないことに注意する。例えば $P(x, y)$ が楕円型かつ係数 $a_\alpha(x)$ および $f(x)$ が実解析的ならば、すべての解 $u(x)$ は実解析的であることが知られている。したがって Cauchy データ $g_i(x)$ は実解析的でなければならぬ。

定理の結論が a を ε^* におきかえて成立するとき、作用素 $P(x, y)$ は * 双曲型 であるという。(A)-双曲型およ

びハイ-双曲型であるための必要条件および十分条件はいろ
いろ知られている (例えば [3] をみよ) が, これらの条件
は作用素 $P(x, \partial)$ が非常に限定されたものでなければならな
いことを示している.

しかし, 定理の結論をゆるめるならば, 次のように作用素
の型にかかわりのない拡張がなりたつ.

定理 1. $* \text{ は } (M_p) \text{ または } \langle M_p \rangle \text{ であるとし, } M_p \text{ は } (M_0)$
 $-(M_4) \text{ をみたす正数列であるとする. } P(x, \partial) \text{ が係数}$
 $a_\alpha(x) \in \mathcal{E}^*(\Omega) \text{ をもつ線型偏微分作用素であり, } \Omega' \text{ が非}$
特性的であるならば, 任意の Cauchy テータ } g_i(x') \in \mathcal{E}^*(\Omega'),
 $i=1, \dots, m, \text{ および } f(x) \in \mathcal{E}^*(\Omega) \text{ に対して (9) および}$

$$(14) \quad \partial^\alpha (P(x, \partial) u(x) - f(x)) = 0, \quad x \in \Omega',$$

がすべての重複指数 γ に対してなりたつような $u(x) \in$
 $\mathcal{E}^*(\Omega)$ が存在する.

実解析的の場合は (14) は (10) と同等であることに注意
する. 証明も同様である. 形式解を構成し, その後で係数を
評価する. この目的のため次のような $\mathcal{E}^*(\Omega')$ を係数環とす
る x_n に関する形式的巾級数の空間を導入する.

定義 1. $f_j(x') \in \mathcal{E}^*(\Omega')$ を係数とする x_n に関する形
式的巾級数

$$(15) \quad f(x', \{x_n\}) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x') \frac{x_n^j}{j!}$$

が空間 $\mathcal{E}_{\Omega}^{(M_p)}(\Omega')$ ($\mathcal{E}_{\Omega}^{\{M_p\}}(\Omega')$) に属するとは, 任意のコンパクト集合 $K' \subset \Omega'$ および $h > 0$ に対して定数 C が存在し (定数 h および C が存在して)

$$(16) \quad \sup_{x' \in K'} |\partial^{\alpha'} f_j(x')| \leq C h^{|\alpha'|+j} M_{|\alpha'|+j}$$

がすべての重複指数 $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ に対して成り立つことであると定義する. このとき, f の台を

$$(17) \quad \text{supp } f = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } f_j}$$

で定義する. コンパクト台をもつ元全体からなる $\mathcal{E}_{\Omega}^*(\Omega')$ の線型部分空間を $\mathcal{D}_{\Omega}^*(\Omega')$ と書く.

線型空間 $\mathcal{E}^*(\Omega)$, $\mathcal{D}^*(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\Omega}^*(\Omega')$ および $\mathcal{D}_{\Omega}^*(\Omega')$ には自然な局所位相を与えることができ, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ ($\mathcal{D}^*(\Omega)$) を

$$(18) \quad \rho(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_n^j f(x', 0) \frac{x_n^j}{j!}$$

にうつす写像 ρ はこれらの位相の下で連続な代数的準同型となる. 次の補題は [2] で証明されている Whitney 型の拡張定理の特別な場合である.

補題 1. M_p が (M. 0) - (M. 3) を満たすならば, 制限写像

$$(19) \quad \rho: \mathcal{E}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega'),$$

$$(20) \quad \rho: \mathcal{D}^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}^*_{\Omega}(\Omega')$$

は位相的全射である.

これを考慮すれば, 定理 1 は次の $\mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega')$ に関する Cauchy-Kowalevsky の定理に帰着される.

定理 2. M_p が (M. 4) を満たすならば,

$$(21) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & P(x, \partial) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega')^P & \rightarrow & \mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega') & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega') \rightarrow 0 \\ & & \text{\tiny $S||$} & & & & \\ & & \mathcal{E}^*(\Omega')^m & \swarrow \Gamma_m & & & \end{array}$$

は局所凸空間の分裂位相的完全列になる. ここで $\mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega')^P$

は $Pu = 0$ の解 $u \in \mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega')$ 全体の成す線型部分空間

を表し, Γ_m は初期値をとる写像 $\sum u_j(x') x_n^j / j! \mapsto$

$(u_{j-1}(x'))_{j=1, \dots, m}$ である.

このとき, $u \in \mathcal{E}^*_{\Omega}(\Omega')$ に対し

$$(22) \quad \text{supp } u = \text{supp } Pu \cup \text{supp } \Gamma_m u$$

がなりたつ, (21) における \mathcal{E}^* を \mathcal{D}^* に置きか

えんものも局所巴空間の分裂位相的完全列になる。

いいかえれば, $g_1(x'), \dots, g_m(x') \in \mathcal{E}^*(\Omega')$ および $f(x', \langle x_n \rangle) \in \mathcal{E}_\Omega^*(\Omega')$ が与えられたとき,

$$(23) \quad u_j(x') = g_{j-1}(x'), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

および

$$(24) \quad p(x, \partial) u(x', \langle x_n \rangle) = f(x', \langle x_n \rangle)$$

を満たす $u(x', \langle x_n \rangle) \in \mathcal{E}_\Omega^*(\Omega')$ が唯一に存在し, 対応

$u \leftrightarrow (g_1, \dots, g_m; f)$ は位相的であると共に台を保つ。

\mathcal{E}^* と \mathcal{D}^* (におきかえても同様である)。

Ω' は非特性的であるから, (24) は

$$(25) \quad \partial_n^m u(x', \langle x_n \rangle) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_n < m}} b_\alpha(x, \langle x_n \rangle) \partial^\alpha u(x', \langle x_n \rangle) + g(x', \langle x_n \rangle)$$

と同等になる。但し $b_\alpha = p(-a_\alpha / a_{(0, \dots, 0, m)})$,

$g = f \cdot p(1 / a_{(0, \dots, 0, m)})$ である。

u の係数 $u_j(x')$ のうち最初の m 個は (23) で与えられる。その後のものは (25) および (25) を $x_n (=1)$ として形式的に微分して得られる等式により帰納的に唯一に決定される。こうして $u_j(x')$ を定めるには τ - δ を微分可能な函数を掛ける操作が必要をたけであるから $\text{supp } u \subset \text{supp } g_1$

$\cup \dots \cup \text{supp } g_m \cup \text{supp } f$ がわかる. 反対の包含関係は明らかである.

最後に u が (16) をみたすことおよび $g_i(x')$, $f(x', \langle x_n \rangle)$ に $u(x', \langle x_n \rangle)$ を対応させる写像が連続であることは, 古典的な場合と同様優級数の方法で証明することができる. 大体は古典的な評価で優級数 $(1-t)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} p! t^p / p!$ があらわれるところを $\sum_{p=0}^{\infty} M_p t^p / p!$ で置きかえればよい.

§2 超平面に台のある超分布の割算定理

定義 2. 局所凸空間 $\mathcal{D}^*(\Omega)$ 上の連続線型汎函数を *族の超分布 (ultradistribution) といい, Ω 上の *族の超分布全体の空間を $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ と書く. $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ には $\mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対空間としての強位相を与える.

Ω_1 が Ω の開部分集合であるとき, 超分布の定義域の制限写像 $\mathcal{D}'^*(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'^*(\Omega_1)$ を連続な埋込み写像 $\mathcal{D}^*(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対写像として定義する. 任意の開被覆に対しこれに従属する 1 の分割が $\mathcal{D}^*(\Omega)$ の函数で構成できることから, 超分布は上で定義した制限写像の下で層をなすことが導かれる. 特に超分布の台が定義できる. $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の双対空間 $\mathcal{E}'^*(\Omega)$ は $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ のコンパクト台をもつ元全体のなす部分空間と自然に同一視される.

Ω' の中に台のある超分布の空間を

$$(26) \quad \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}^{*'}(\Omega); \text{supp } f \subset \Omega'\},$$

$\mathcal{E}_{\Omega'}^{*'}(\Omega) = \mathcal{E}^{*'}(\Omega) \cap \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega)$ と書く. このとき,
[2] で証明された部分多様体上台のある超分布の構造定理の
特別な場合として次の補題が成立する.

補題 2. M_p が (M. 0) - (M. 3) をみたすならば, $\mathcal{D}^{*'}(\Omega)$
の閉線型部分空間 $\mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega)$ ($\mathcal{E}^{*'}(\Omega)$ の閉線型部分空間
 $\mathcal{E}_{\Omega'}^{*'}(\Omega)$) は $\mathcal{D}_{\Omega}^{*'}(\Omega')$ ($\mathcal{E}_{\Omega}^{*'}(\Omega')$) の 強双対空間
と自然に同型である.

分布の場合と同様, 線型微分作用素

$$(27) \quad Q(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_{\alpha}(x) \partial^{\alpha}$$

の $\mathcal{D}^{*'}(\Omega)$ における作用を形式的双対作用素 $Q'(x, \partial): \mathcal{D}^{*'}(\Omega)$
 $\rightarrow \mathcal{D}^{*'}(\Omega)$ の双対作用素として定義する. 但し, 係数 $b_{\alpha}(x)$
 $\in \mathcal{E}^{*'}(\Omega)$ と仮定し,

$$(28) \quad Q'(x, \partial) \varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} (b_{\alpha}(x) \varphi(x)).$$

定理 2 の作用素 $P(x, \partial)$ と $Q(x, \partial)$ が互に形式的双対に
なっているとする. そのとき, 補題 2 を用いて定理 2 の双対
をとれば次の定理が得られる.

定理 3. M_p が (M.0) - (M.4) をみたすならば,

$$(29) \quad \begin{array}{c} 0 \leftarrow (\mathcal{D}^*(\Omega)^P)' \leftarrow \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega) \xleftarrow{Q(x, \partial)} \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega) \leftarrow 0 \\ \parallel \nearrow \Gamma_m' \\ \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega')^m \end{array}$$

は局所凸空間の分裂位相的完全列になる. ここで $(\mathcal{D}^*(\Omega)^P)'$ は $\mathcal{D}^*(\Omega)^P$ の強双対空間であり, Γ_m' は $(v_j(x'))_{j=0, \dots, m-1}$ に対し $\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j v_j(x') \otimes \delta^{(j)}(x_n)$ を対応させる写像である.

また, (29) において \mathcal{D}^* をすべて \mathcal{E}^* におきかえたものは局所凸空間の分裂位相的完全列になる.

すなわち, 任意の $u \in \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega) \ (\mathcal{E}_{\Omega'}^{*'}(\Omega))$ に対し

$$(30) \quad u(x) = Q(x, \partial)w(x) + v_0(x') \otimes \delta(x_n) + \dots + v_{m-1}(x') \otimes \delta^{(m-1)}(x_n)$$

とある $w(x) \in \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega) \ (\mathcal{E}_{\Omega'}^{*'}(\Omega))$ と $v_0(x'), \dots,$

$v_{m-1}(x') \in \mathcal{D}_{\Omega'}^{*'}(\Omega') \ (\mathcal{E}_{\Omega'}^{*'}(\Omega'))$ が唯一通り存在し,

$u \longleftrightarrow (w, v_0, \dots, v_{m-1})$ の対応は位相的かつ台を保つ.

これは $u(x)$ を微分作用素 $Q(x, \partial)$ で割算したときの商が $w(x)$, かつ余りが $v_0(x') \otimes \delta(x_n) + \dots + v_{m-1}(x') \otimes \delta^{(m-1)}(x_n)$ であると解釈することかできる.

定理 2 と 3 は同等である, て, 定理 3 の双対をとれば逆に定

理 2 が得られる。

§ 3 同次超分布解の境界値

$v(x) \in \mathcal{D}'(\Omega_+)$ を Ω の上半部分 $\Omega_+ = \{x \in \Omega; x_n > 0\}$ における同次方程式

$$(31) \quad Q(x, \partial) v(x) = 0$$

の解とする。 v は Ω' をこえて超分布 $\tilde{v}(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に接続できると仮定する。このとき, [1] の超分布の構造定理を用いれば, 下半部分 $\Omega_- = \{x \in \Omega, x_n < 0\}$ で消える拡張 \tilde{v} が存在することがわかる。そうすれば $Q(x, \partial) \tilde{v}(x) \in \mathcal{D}'_{\Omega'}(\Omega)$ であるから, 定理 3 により

$$(32) \quad Q(x, \partial) (\tilde{v}(x) - w(x)) = v_0(x') \otimes \delta(x_n) + \cdots + v_{m-1}(x') \otimes \delta^{(m-1)}(x_n)$$

となる $v_0(x'), \dots, v_{m-1}(x') \in \mathcal{D}'(\Omega')$ および $w(x) \in \mathcal{D}'_{\Omega'}(\Omega)$ が唯一通り存在する。

$v(x)$ の拡張 $\tilde{v}(x)$ をとりかえても $w(x)$ がかわるだけであるから, $v_0(x'), \dots, v_{m-1}(x')$ は解 $v(x)$ のみによって定まる。これらは $v(x)$ の境界値の意味をもつ。実際もし v が x_n に関して滑らかであり Heaviside 函数 $\theta(x_n)$ との積に意味があるとなれば, 局所的に定式化した Green の公

式

$$Q(x, \partial)(\theta(x_n) v(x)) = \theta(x_n) Q(x, \partial) v(x)$$

$$(33) \quad + \sum_{i=0}^{m-1} B_i(x, \partial) v(x) \Big|_{x_n=0} \otimes \delta^{(i)}(x_n)$$

|により

$$(34) \quad v_i(x') = B_i(x, \partial) v(x) \Big|_{x_n=0}$$

を得る.

Ω' が非特性的であることを用いれば, Ω' 上の微分作用素 $A_{j,i}(x', \partial')$ が存在して, $j=0, 1, \dots, m-1$ に対し

$$(35) \quad \partial_n^j v(x', 0) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{j,i}(x', \partial') B_i(x, \partial) v(x) \Big|_{x_n=0}$$

となることもわかる. そこで, 一般の場合も

$$(36) \quad \partial_n^j v(x', +0) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{j,i}(x', \partial') v_j(x')$$

によって解 $v \in \mathcal{D}^{*'}(\Omega_+)$ の境界値 $\partial_n^j v(x', +0)$, $j=0, \dots, m-1$ を定義する.

$Q(x, \partial)$ の係数が実解析的であるとき, ここで定義した境界値は [5] で定義した超函数としての境界値と同じである. 係数が実解析的でないときも, 係数の正則性が許すかぎり, 境界値は族 $*$ のとり方によらず, 解 v のみによって定まる.

$v(x)$ の接続可能性については次の判定条件がある ([4]).

補題 3. Ω_+ 上の可測函数 $v(x)$ は, もし任意のコンパクト集合 $K' \subset \Omega'$ に対して定数 L および C が存在し (さらに任意の $L > 0$ に対して定数 C が存在し)

$$(37) \quad \sup_{x' \in K'} |v(x', x_n)| \leq C \exp M^*(L/x_n)$$

となるならば, 超分布 $\tilde{v} \in \mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$ ($\mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$) に拡張することができる. 但し

$$(38) \quad M^*(p) = \sup_p \log \left(\frac{p^p p!}{M_p} \right).$$

$M_p = p!^s$ のときは $M^*(p)$ は $p^{1/(s-1)}$ の大きさである.

定理 4. $Q(x, y)$ を $a(\Omega)$ の元を係数とする m 階の積内型線型偏微分作用素とする. このとき, Ω_+ における (31) の解 $v(x)$ が $\mathcal{D}^{*'}(\Omega')$ に属する境界値 $\partial_n^j v(x', +0)$, $j = 0, \dots, m-1$, をもつための必要十分条件は $v(x)$ が補題 3 の判定条件を満たすことである. この場合, $\partial_n^j v(x', x_n)$ は $x_n \rightarrow 0$ のとき $\mathcal{D}^{*'}(\Omega')$ の位相で $\partial_n^j v(x', +0)$ に収束する.

十分であることは上の議論より明らかである. 必要性は $Q(x, y)$ の基本解を具体的に構成することにより証明される.

特に $Q(x, y)$ が 1 変数の Cauchy-Riemann 作用素であるときの定理 4 は, 超函数が $*$ 族の超分布であるための必要十分条件を定義函数である整型函数の変数の虚部が 0 に近づくときの増大度によって与えられている。この場合の定理 4 の証明は [1], [4] にある。

引用文献

- [1] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 20 (1973), 25-105.
- [2] H. Komatsu, Ultradistributions, II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, Ibid., 24 (1977), 607-628.
- [3] H. Komatsu, Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 Suppl. (1977), 233-245.
- [4] 小松孝三郎, 超関数論入門, 岩波講座基礎数学解析学 (II) ix, 岩波, 1978.
- [5] H. Komatsu - T. Kawai, Boundary values

of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 7 (1971), 95-104.

- [6] M. Nagumo, Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen, Jap. J. Math, 18 (1942), 41-47.
- [7] F. Trèves, Ovcyannikov theorem and Hyperdifferential Operators, Notas de Mat. No. 46, Inst. Mat. Pura Apl. Rio de Janeiro, 1968.